2.10 Summen

Sei K ein Körper. Gegeben seien $p, q \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in K$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit $p \leqslant i \leqslant q$. Die *Summe* dieser Elemente ist definiert wie folgt:

$$\boxed{\sum_{i=p}^{q} a_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } p > q, \\ a_p & \text{falls } p = q, \\ \left(\sum_{i=p}^{q-1} a_i\right) + a_q & \text{falls } p < q. \end{cases}}$$

Proposition: Für jedes $n \geqslant 0$ gilt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

Bew.: $n=0$: $\sum_{k=1}^{0} k = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{IA}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

qed.

Eine Summe über eine endliche Menge ganzer Zahlen I schreiben wir in der Form:

$$\sum_{i \in I} a_i$$

Alternativ schreiben wir nur die Bedingungen unter das Summenzeichen.

Beispiel: Es gilt

$$\Big(\sum_{p \leqslant i \leqslant q} a_i\Big)^2 = \sum_{p \leqslant i \leqslant q} a_i^2 + 2 \cdot \sum_{p \leqslant i < j \leqslant q} a_i a_j .$$

Bew.: $\displaystyle \Big(\sum_{p \leq i < q} a_i\Big)^2 = \Big(\sum_{p \leq i \leq q} a_i\Big) \cdot \Big(\sum_{p \leq j \leq q} a_j\Big) = \sum_{p \leq i \leq q} \sum_{p \leq j \leq q} a_i a_j$

$$= \underbrace{\sum_{p \leq i < j \leq q} a_i a_j}_{} + \sum_{p \leq i \leq q} a_i^2 + \underbrace{\sum_{p \leq j < i \leq q} a_i a_j}_{}$$

gleich

$$= \sum_{p \leq i \leq q} a_i^2 + 2 \cdot \sum_{p \leq i < j \leq q} a_i a_j .$$

qed.

Definition: Für ganze Zahlen $n \geqslant k \geqslant 0$ ist der *Binomialkoeffizient* „n tief k“ definiert durch

$$\boxed{\binom{n}{k}} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

X

Bedeutung: Die Zahl $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen.

Beachte: Die Zahl $n!$ ist die Anzahl der Totalordnungen auf einer Menge mit n Elementen.

Anzahl von Tupeln $(a_1, \dots, a_k)$ mit paarweise verschiedenen $a_i \in X$

$= n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = k! \cdot$ (Anzahl der k-elementigen Teilmengen von X)

Grundeigenschaften:

(a) Für alle $n \geqslant 0$ gilt $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

(b) Für alle $n > k > 0$ gilt $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

(c) Für alle $n \geqslant k \geqslant 0$ gilt $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$.

(d) „ „ „ „ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Bew.: Sei $X = \{1, \dots, n\}$

$X' := \{1, \dots, n-1\}$

Für $Y \subset X$ mit $|Y| = k$ gilt

entweder (a) $n \in Y$ und $|Y \setminus \{n\}| = k-1$,

oder (b) $n \notin Y$ und $|Y \setminus \{n\}| = k$

$\Rightarrow \binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{(a)} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{(b)}$ qed.

Satz: Für alle $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ und alle $a, b \in K$ gilt die *binomische Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Bew.: $n = 0$: $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot a^{0-k} \cdot b^k$

$n \rightsquigarrow n+1$: $\boxed{(a+b)^{n+1}} = (a+b) \cdot (a+b)^n \overset{\text{IV}}{=} (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$k+1 = \ell$

$k = \ell - 1$

$$= \binom{n}{0} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{a^{n+1-k} b^k} + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} \underbrace{a^{n+1-\ell} b^\ell}$$

$$= \underbrace{a^{n+1}}_{= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}_{\binom{n+1}{k}} \Big] a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^{n+1}}_{= b^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} \cdot a^0 b^{n+1}}$$

$$\boxed{= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k}$$

qed.

Variante: Gegeben seien eine beliebige Menge I und ein Element $a_i \in K$ für jedes $i \in I$. Wir fordern $a_i = 0$ für fast alle $i \in I$, das heisst, es existiert eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ mit $a_i = 0$ für alle $i \in I \smallsetminus I_0$. Dann definieren wir

$$\boxed{\sum_{i\in I}{}' a_i \;:=\; \sum_{i\in I_0} a_i.}$$

Dies ist unabhängig von der gewählten Teilmenge I_0 und daher wohldefiniert. Der Strich $'$ am Summenzeichen bezeichnet die Forderung $a_i = 0$ für fast alle $i \in I$ und dient zur Unterscheidung von einer unendlichen Reihe im Kontext der Analysis. Der Sinn dieser Notation liegt darin, dass wir nicht festlegen müssen, welche Koeffizienten Null sein müssen.

Die Summe in diesem verallgemeinerten Sinn erfüllt dieselben Grundregeln wie oben.

Beispiel: Ein *Polynom* in einer Variablen X mit Koeffizienten $a_i \in K$ ist eine endliche Summe der Form

$$\boxed{\sum_{i\geqslant 0}{}' a_i X^i,}$$

bei der alle ausser endlich viele a_i gleich Null sein müssen.

2.11 Produkte

Definition: Das *Produkt* endlich vieler $a_i \in K$ kürzen wir ab wie folgt:

$$\boxed{\prod_{i=p}^{q} a_i} := \boxed{\prod_{p \leqslant i \leqslant q} a_i} := \begin{cases} a_p a_{p+1} \cdots a_q & \text{für } p \leqslant q, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ohne Pünktchen geschrieben bedeutet das:

$$\boxed{\prod_{i=p}^{q} a_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } p > q, \\ a_p & \text{falls } p = q, \\ \left(\prod_{i=p}^{q-1} a_i\right) \cdot a_q & \text{falls } p < q. \end{cases}}$$

Bemerkung: Der Wert des leeren Produkts ist also das neutrale Element 1 der Multiplikation. Dies ermöglicht wieder das Aufspalten eines Produkts wie folgt.

Proposition: Für alle $p, q, r \in \mathbb{Z}$ und $a_i, b_i \in K$ und $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt:

$$\prod_{i=p}^{r} a_i = \prod_{i=p}^{q} a_i \cdot \prod_{i=q+1}^{r} a_i \quad \text{falls } p-1 \leqslant q \leqslant r,$$

$$\prod_{i=p}^{q} a_i = \prod_{j=p}^{q} a_j \quad \text{(Umbenennen der Laufvariablen)},$$

$$\prod_{i=p}^{q} a_i b_i = \prod_{i=p}^{q} a_i \cdot \prod_{i=p}^{q} b_i$$

$$\left(\prod_{i=p}^{q} a_i\right)^n = \prod_{i=p}^{q} a_i^n.$$

Beispiel:

Für alle $n \geq 0$: $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1.$

Bew.: $n=0$: $\prod_{k=1}^{0} \frac{k+1}{k} = 1 = 0+1$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: $\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+1}{k} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} \overset{IV}{=} (n+1) \cdot \frac{n+2}{n+1} = (n+2)$ ✓

qed

Bew.: $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod_{k=1}^{n} k}$ $\quad k+1 = l$

$= \frac{\prod_{l=2}^{n+1} l}{\prod_{l=1}^{n} l} = \frac{n+1}{1} = n+1.$

qed

Teleskop-Produkt.

Variante: In Analogie zu Summen schreiben wir ein Produkt über eine endliche Menge I in der Form:

$$\prod_{i \in I} a_i$$

oder schreiben nur die Bedingungen unter das Summenzeichen. Für eine beliebige Menge I und Elemente $a_i \in K$ mit $a_i = 1$ für fast alle $i \in I$ definieren wir

$$\boxed{\prod_{i \in I}{}' a_i := \prod_{i \in I_0} a_i}$$

für jede endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ mit $a_i = 1$ für alle $i \in I \setminus I_0$. Dies ist unabhängig von der gewählten Teilmenge I_0 und daher wohldefiniert.

Das Produkt in diesem verallgemeinerten Sinn erfüllt dieselben Grundregeln wie oben.